**Лекція №2**

***Властивості ПР функцій***

Далі будемо використовувати інші визначення ПРФ, РФ та ЧРФ. А саме:

а) функцію, яку можна обчислити всюди визначеним алгоритмом будемо називати рекурсивною;

b) функцію, яку можна обчислити всюди визначеним алгоритмом, без використання оператора while … do будемо називати примітивно рекурсивною;

c) функцію, яку можна обчислити алгоритмом лише з використання оператора while … do будемо називати частково рекурсивною.

**Приклад 2.1.** Функція *f*(*x*, *y*) = *x* + *y* є ПРФ.

Дійсно, алгоритм обчислення цієї функції наступний:

function *f*(*х*, *y*)

begin

if *y* = 0 then *f* = *x*

else *f* = *f*(*x*, *y* – 1) + 1

end.

**Приклад 2.2.** Функція *f*(*x*, *y*) = *xy* є ПРФ.

Дійсно, алгоритм обчислення цієї функції наступний:

function *f*(*х*, *y*)

begin

if *y* = 0 then *f* = 1

else *f* = *f*(*x*, *y* – 1) × *x*

end.

**Приклад 2.3.** Функція *f*(*x*) = *x* ∸ 1 є ПРФ.

Дійсно, алгоритм обчислення цієї функції наступний:

function *f*(*х*)

begin

if *x* = 0 ∨ *x* = 1 then *f* = 0

else *f* = *f*(*x* – 1) + 1

end.

**Приклад 2.4.** Функція *f*(*x*, *y*) = *x* ∸ *y* є ПРФ.

Дійсно, алгоритм обчислення цієї функції наступний:

function *f*(*х*, *y*)

begin

if *x* < *y* ∨ *x* = *y* then *f* = 0

else *f* = *f*(*x* – 1, *y*) + 1

end.

**Теорема 2.1** (про сумування)**.**Нехай функція *g* примітивно рекурсивна. Тоді функція *f*, яка визначається рівністю



теж примітивно рекурсивна.

Доведення.

1. function *f*(*x*) 2. function *f*(*x*)

begin begin

if *x* = 0 then *f* = *g*(0) *s* = 0

else *f* = *f*(*x* – 1) + *g*(*x*) for *i* = 0 to *x*

end *s* = *s* + *g*(*i*)

*f* = *s*

end

**Наслідок 2.1.** Якщо функція *g* примітивно рекурсивна, то 2-місна функція *f*, яка визначається схемою

*f*(*x*, *y*) = 

також ПР функція.

Доведення.

function *f*(*x*,*y*)

begin

if *x* > *y* then *f* = 0

else {*s* = 0

for *i* = *x* to *y*

*s* = *s* + *g*(*i*)

*f* = *s*}

end.

**Наслідок 2.2**. Якщо *g*, *h*, *k* – ПР функції, то функція *f*\*, що визначається співвідношенням





також ПР функція.

Ця функція є суперпозицією функції *f* з наслідку 1 та функцій *h*, *k* (*f*\*(*x*) = *f*(*h*(*x*), *k*(*x*))) і обчислюється наступним алгоритмом:

function *f*\*(*x*)

begin

if *h*(*x*) > *k*(*x*) then *f*\*= 0

else *f\** = *f*(*h*(*x*), *k*(*x*))

end

де *f* – функція з наслідку 1.

**Теорема 2.2** (про множення)**.**Нехай функція *g* примітивно рекурсивна. Тоді функція *f*, яка визначається рівністю



теж примітивно рекурсивна.

Доведення.

function *f*(*x*)

begin

if *x* = 0 then *f* = *g*(0)

else *f* = *f*(*x* – 1) *g*(*x*)

end.

**Теорема 2.3.** Нехай функції *f*1, *f*2, …, *fk*+1, *α*1, *α*2, …, *αk* примітивно рекурсивні, причому при будь-яких значеннях змінних ніякі дві з функцій *α*1, *α*2, …, *αk* не дорівнюють 0. Тоді функція, яка визначається кусковою схемою



буде примітивно рекурсивною.

Доведення.

function *f*(*x*)

begin

if *α*1(*x*) = 0 then *f* = *f*1(*x*)

if *α*2(*x*) = 0 then *f* = *f*2(*x*)

………………………….

if *αk*(*x*) = 0 then *f* = *fk*(*x*)

else *f* = *fk*+1(*x*)

end.

В теоремі 3 розглянуто типовий випадок, коли умова має вигляд *αi* = 0. Так як умови вигляду

*αi*= *βi*, *αi* ≤ *βi*, *αi*< *βi*

рівносильні, відповідно, умовам

|*αi*– *βi*| = 0, *αi*∸ *βi*= 0,  (*βi*∸ *αi*) = 0,

то теорема 3 залишається справедливою і в тому разі, коли в кусковій схемі рівності *αі*= 0 замінюються іншими умовами, де *αі*, *βі* – ПР функції.

Розглянемо рівняння

*g*(*x*, *y*) = 0,

ліва частина якого є всюди визначена функція. Припустимо, що для кожного значення *x* це рівняння має єдиний розв’язок *y*. Тоді цей розв’язок буде однозначною всюди визначеною функцією від *x*. Чи буде ця функція примітивно рекурсивною, якщо функція *g* є ПР функцією від *x*, *y*? В загальному випадку відповідь на це питання негативна. Але справедлива наступна теорема.

**Теорема 2.4.** Нехай *g*(*x*, *y*), *α*(*x*) такі примітивно рекурсивні функції, що рівняння

*g*(*x*, *y*) = 0

для кожного *x* має хоча б один розв’язок і

*μy*(*g*(*x*, *y*) = 0) ≤ *α*(*x*)

для будь-якого *x*. Тоді функція

*f*(*x*) = *μy*(*g*(*x*, *y*) = 0)

теж примітивно рекурсивна.

Доведення.

function *f*(*x*)

begin

*s* = 0

for *i* = 0 to *α*(*x*)

if *h*(*x*, *i*) ≠ 0 then *s* = *s* + 1

*f* = *s*

end,

де *h*(*x*, *i*) = *g*(*x*, 0) … *g*(*x*, *i*).